Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - А категорија

1. Нека је $n = 21982145917308330487013369 = a^{13}$. Како n има 26 цифара добијамо да је $n < 10^{26}$, па је $a < 100$. Како је $8^{13} = 2^{3\cdot 13} = \frac{2^{40}}{2} = \frac{1024^4}{2} \approx 5 \cdot 10^{11} < 10^{12}$ ($8^{13} = 549755813888$), одакле је $80^{13} = (8 \cdot 10)^{13} = 8^{13} \cdot 10^{13} < 10^{12} \cdot 10^{13} = 10^{25} < n$. Ако са c означимо последњу цифру броја a, тада налазимо да је она 3, 7 или 9, јер је $a^{13} \equiv c^{13} \equiv 9 \pmod{10}$. Како је $3^4 \equiv 7^4 \equiv 9^4 \equiv 1 \pmod{10}$, добијамо да је и $3^{12} \equiv 7^{12} \equiv 9^{12} \equiv 1 \pmod{10}$, те мора бити $a = 9$. Дакле, имамо две могућности: $a = 89$ или $a = 99$. Међутим, ако је $a = 99$, то је он је дељив са 3, одакле је и $n = a^{13}$ дељив са 3, као и са 9. КОначно, збир цифара броја a је 107, па он није дељив са 9. Дакле, $a = 89$.

2. Доказаћемо да Бранко има победничку стратегију. Обележимо поље табле са (i, j), $i = \overline{1, 2023}$, $j = \overline{1, 2024}$, акко се налази у $i-$тој колони и $j-$ој врсти. Упаримо сва поља табле на следећи начин: пар чине поља (i, j) и $(i, 2025 - j)$, $i = \overline{1, 2023}$, $j = \overline{1, 1012}$. С обзиром да се упарена поља, у сваком пару, налазе у истој врсти (прва координата), краљица у једном потезу може доћи са ма ког поља на поље које је управо његов пар (крећући се као топ). Бранко у првом потезу помера краљицу на поље које је пар почетном пољу. Бранко у свим наредним потезима краљицу ставља на поље које је пар пољу на које је Аца ставио краљицу у свом (до тада) последњем потезу. Тиме Бранко увек има "одговор" на Ацин потез. Стога, како се може одиграти само коначно много потеза, у неком тренутку Аца неће моћи да одигра потез, чиме ће игру добити Бранко.

3. Доказаћемо да број N може да се заврши са највише 2 нуле. За $n = 3$ је, свакако, $N = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$, те се он завршава са тачно две нуле. Уколико би се за неко $n \in \mathbb{N}$ број N завршавао са три и више нула, тада би он дао остатак 0 при дељењу са 8. Међутим, то је немогуће. Заиста, за $n = 1$ је $N = 1 + 2 + 3 + 4 \equiv 2 \pmod 8$, док је за $n = 2$ испуњено $N \equiv 1 + 4 + 1 + 0 \equiv 6 \pmod 8$. За непарно $n \geqslant 3$ је испуњено $N \equiv 1 + 0 + 3 + 0 \equiv 4 \pmod 8$, док за парно $n \geqslant 3$ важи $N \equiv 1 + 0 + 1 + 0 \equiv 2 \pmod 8$.
Једноставно, провером, видимо да се N може завршавати цифром различитом од нула, јер за $n = 4$ је $N = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 1 + 16 + 81 + 256 = 354$, као и са једном нулом (за $n = 1$ је $N = 10$).

4. Уочимо тачку C_1 на полуправој DC, са почетком у тачки D, такву да је $DC_1 = AX$. Уколико се тачка C_1 поклапа са тачком C, онда су углови $\sphericalangle ADX, \sphericalangle DXC$ и $\sphericalangle XCB$ углови са паралелним крацима, те су њихове симетрале паралелне. Размотримо, сада, случајеве када се тачке C_1 и C не поклапају. Како се из тачака C_1 и C дуж XB види под једнаким угловима, при чему су поменуте тачке са исте стране праве XB, закључујемо да тачке X, B, C_1 и C припадају једној кружници. Нека је p симетрала дужи AB, $\alpha = \sphericalangle DAB$ и $\beta = \sphericalangle CBA$. Уколико је тачка C_1 између тачака D и C, имамо да је $\sphericalangle XC_1C = 180^\circ - \alpha$ (јер је четвороугао AXC_1D паралелограм), док, због тетивности четвороугла $XBCC_1$, важи и $\sphericalangle XC_1C + \beta = 180^\circ$. Зато је $\alpha = \beta$, односно трапез $ABCD$ је једнакокрак. У случају да важи распоред тачака $D - C - C_1$, због тетивности је $\beta = \sphericalangle XC_1C$, као и $\sphericalangle XC_1C = \alpha$ (јер је четвороугао AXC_1D паралелограм), те је и у овом случају $ABCD$ једнакокраки трапез. Како су сада симетрале углова $\sphericalangle ADX$ и $\sphericalangle XCB$ симетричне у односу на праву p, која је уједно и симетрала угла $\sphericalangle DXC$, то се оне секу на p или су паралелне са p.

5. Обележимо суму из задатка са S. Тада је $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{2024} \frac{a_i}{2^i} = \frac{3}{4} + \sum_{i=3}^{2024} \frac{a_i}{2^i} = \frac{3}{4} +$

$\sum_{i=3}^{2024} \frac{a_{i-1} + a_{i-2}}{2^i} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{2024} \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{4} \sum_{i=3}^{2024} \frac{a_{n-2}}{2^{n-2}} < \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(S - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}S$. Односно, $\frac{1}{4}S < \frac{1}{2}$, те је $S < 2$, што је и требало доказати.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - А категорија

1. Нека је $I(a,b) = |202^a - 4^b|$, за $a,b \in \mathbb{N}$. Докажимо да је $I(a,b) \geqslant 54$. Приметимо најпре да за произвољне $a,b \in \mathbb{N}$ важи $101 \mid 202^a$ и $101 \nmid 4^b$, те $101 \nmid 202^a - 4^b$. Отуда је $I(a,b) \neq 0$. Уз то, за произвољне $a,b \in \mathbb{N}$, важи $202^a \equiv_3 1^a \equiv 1$ и $4^b \equiv_3 1^b \equiv 1$, те $3 \mid I(a,b)$. Разликујемо следеће случајеве:
1° $a \geqslant 5$ и $b \geqslant 3$: Тада $2^5 \mid 202^a$ и $2^5 \mid 4^b$, те $2^5 \mid I(a,b)$. Зато је број $I(a,b)$ дељив са 32, а како је дељив и са 3 и различит од нуле, добијамо да је $I(a,b) \geqslant 3 \cdot 32 = 96$.
2° $b < 3$: Сада за свако a важи $I(a,b) = 202^a - 4^b \geqslant 202^1 - 4^2 = 185$.
3° $a < 5$: Разликоваћемо следеће подслучајеве:
 3.1.$^\circ$ $a \in \{2,4\}$: Тада је $I(a,b) = (202^{\frac{a}{2}} + 2^b)|202^{\frac{a}{2}} - 2^b| \geqslant (202^1 + 2^1) \cdot 1 = 204$.
 3.2.$^\circ$ $a = 3$: Како је $202^3 < 256^3 = 4^{12}$ и $202^3 > 2^3 \cdot 100^3 = 2^3 \cdot 2^6 \cdot 625 \cdot 25 > 2^9 \cdot 2^9 \cdot 2^4 = 4^{11}$, то је $I(3,b) \geqslant \min\{202^3 - 4^{11}, 4^{12} - 202^3\}$. Одавде, како је $202^3 - 4^{11} > 192^3 - 2^{22} = 3^3 \cdot (2^6)^3 - 2^{22} = 2^{18}(3^3 - 2^4) > 2^{18}$ и $4^4 - 202^1 \mid (4^4)^3 - (202^1)^3$, имамо да је $I(3,b) \geqslant 4^4 - 202^1 = 54$.
 3.3.$^\circ$ $a = 1$: Како је $4^3 < 202^1 < 4^4$, то је $I(1,b) \geqslant \min\{202^1 - 4^3, 4^4 - 202^1\} = 54$.
Овим смо показали да за свако $a,b \in \mathbb{N}$ важи $I(a,b) \geqslant 54$. Како је $I(1,4) = 54$, то је тражена најмања вредност, заиста, једнака 54.

2. Прво, за $b = 0$ је, очигледно, $a \in \mathbb{Z}$, тј. парови облика $(a,0)$, $a \in \mathbb{Z}$, су решења. Нека је $b \neq 0$. Тада мора бити и $a \neq 0$. Сређивањем дате једнакости добијамо да је

$$a^3 + ab + a^2b^2 + b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Након скраћивања са b, груписањем (посматрамо израз као квадратну једначину по b), добијамо да је

$$2b^2 + (a^2 - 3a)b + 3a^2 + a = 0.$$

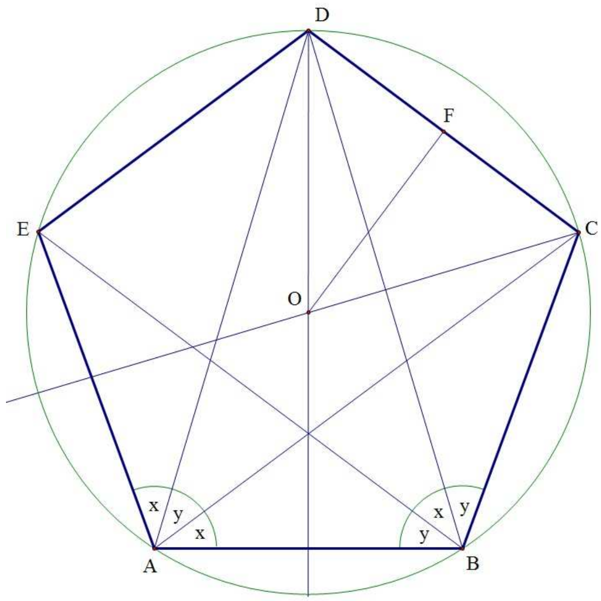
Дискриманта добијене квадратне једначине је

$$D = (a^2 - 3a)^2 - 8(3a^2 + a) = a^4 - 6a^3 - 15a^2 - 8a,$$

за коју треба да важи да је потпун квадрат. Како је $D = a(a-8)(a+1)^2$, добијамо да мора важити да је $a^2 - 8a$ потпун квадрат или је $a + 1 = 0$. За $a = -1$ тривијално налазимо да је решење пар $(-1,-1)$. За $a \neq -1$, мора бити $a^2 - 8a = k^2$, за неко $k \in \mathbb{N}_0$. Стога је $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 8$, $a \in \mathbb{Z}$. Уколико претходну једнакост третирамо као квадратну једначину по a, тј. уколико посматрамо квадратну једначину $a^2 - 8a - k^2 = 0$, тада дискриминанта исте мора бити, такође, потпун квадрат, тј. важи $64 + 4k^2 = 4(16 + k^2) = 4l^2$, при чему је $l \geqslant 4$, $l > k$, $l \in \mathbb{N}$. Дакле, мора бити $l^2 = k^2 = (l-k)(l+k) = 16$, тј. $l + k = l - k = 4$ или $l + k = 4(l-k) = 8$ (случај $l + k = 16$ и $l - k = 1$ отпада, јер су l и k цели). Провером тривијално добијамо да а може бити једино 8 или 9 (случајеви $a = 0$ и $a = -1$ отпадају). Дакле, сва решење једначине су:

$$(a,b) \in \{(-1,-1),(8,-10),(9,-6),(9,-21)\} \cup \{(a,0) : a \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Доказаћемо да петоугао $ABCDE$, који задовољава све наведене услове задатка, мора бити правилан. Нека је $x = \sphericalangle BAC = \sphericalangle EBD = \sphericalangle DAE$ и $y = \sphericalangle ABE = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$. Како се дуж CD из тачака A и B види под једнаким угловима, а тачке A и B су са исте стране праве CD, закључујемо да се тачке A, B, C и D налазе на истој кружници. Нека је то кружница k_1. Аналогно, како се дуж ED из тачака A и B види под једнаким угловима, а тачке A и B су са исте стране праве ED, закључујемо да се тачке A, B, E и D налазе, такође, на истој кружници. Нека је то кружница k_2. Тачке A, B и D налазе се и на кружници k_1 и на кружници k_2, одакле следи да су кружнице k_1 и k_2 идентичне. Дакле, имамо да се тачке A, B, C, D и E налазе на истој кружници, односно, да је петоугао $ABCDE$ тетиван.



Приметимо да због једнакости периферијских углова над истом тетивом важи: $\sphericalangle AED = 180° - \sphericalangle EAD - \sphericalangle ADE = 180° - x - y$, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = y + (180° - 2x - 2y) + x = 180° - x - y$ и $\sphericalangle DCB = 180° - \sphericalangle BDC - \sphericalangle DBC = 180° - x - y$. Дакле, $\sphericalangle AED = \sphericalangle EDC = \sphericalangle DCB$. Нека је O центар уписане кружнице у петоугао $ABCDE$ и F подножје нормале из тачке F на праву DC. Тачка O, као центар уписане кружнице у петоугао $ABCDE$, налази се у пресеку симетрала углова поменутог петоугла. Отуда се тачка O налази и на симетрали једнаких углова $\sphericalangle EDC$ и $\sphericalangle DCB$, па троуглови OFD и OFC имају три пара једнаких углова. Како је OF заједничла страница тих троуглова, наспрам једнаких углова, то су троуглови OFD и OFC подударни. Из ове подударности имамо да је $FD = FC$, па се тачка O налази на симетрали странице CD. Аналогно, као у претходном разнатрању, закључујемо да се тачка O налази и на симетрали странице ED. Дакле, доказали смо да се симетрале страница CD и ED секу у тачки O, а како се центар описане кружнице налази у пресеку симетрала страница, то је тачка O и центар описане кружнице око петоугла $ABCDE$. Централни угао над тетивом CD је двоструко већи од периферијског угла над том тетивом, те је $\sphericalangle DOC = 2\sphericalangle DAC \Leftrightarrow 180° - 2 \cdot \frac{180° - x - y}{2} = 2y \Leftrightarrow x = y$. Слично овом, важи и $AOB = 2ADB \Leftrightarrow 180° - \frac{3}{2}(x+y) = 2(180° - 2(x+y)) \Leftrightarrow x + y = 72°$. Одавде, како је и $x = y$, имамо $x = y = 36°$, те су тетиве AB, BC, CD, DE и EA међусобно једнаке, с обзиром да им одговарају једнаки периферијски углови (то су углови x, y и $180° - 2(x+y)$). Из свега добијеног лако рачунамо и да су сви унутрашњи углови петоугла $ABCDE$ једнаки (по $108°$). Овим је доказано да су у петоуглу $ABCDE$ сви унутрашњи углови једнаки и да су му међусобно једнаке и све странице, те је он заиста правилан петоугао.

4. Први сабирак је сигурно дељив са x, y и $x - y$. Исто важи за други сабирак. Како је збир са леве стране знака једнакости дељив са x, y и $x - y$, док је са десне стране знака једнакости број 2^{2023}, следи да бројеви x, y и $x - y$ морају бити облика $x = 2^a$, $y = 2^b$, $x - y = 2^c$, где су a, b и c ненегативни цели бројеви. Међутим, због услова $x > y$, мора важити и да је $a > b$. Сада је $2^a - 2^b = 2^c$, односно $2^b\left(2^{a-b} - 1\right) = 2^c$. Са десне стране знака једнакости последње релације је број облика 2^c, што значи да израз $2^{a-b} - 1$ у загради са леве стране знака једнакости мора бити облика 2^k, за неки природан број k. Зато мора важити да је $2^{a-b} - 1 = 1$, односно $a - b = 1$. Заменом $b = a - 1$ у датој једначини, добијамо да је

$$NZS(2^{2a} + 2^{2a-1}, 2^{2a-1} - 2^{2a-2}) + NZS(2^a - 2^{a-1}, 2^{2a-1}) = 2^{2023},$$

односно

$$NZS(3 \cdot 2^{2a-1}, 2^{2a-2}) + NZS(2^{a-1}, 2^{2a-1}) = 2^{2023},$$

одакле добијамо једначину

$$3 \cdot 2^{2a-1} + 2^{2a-1} = 2^{2023}.$$

На основу последње једнакости закључујемо да је $2^{2a+1} = 2^{2023}$, одакле је $a = 1011$, $x = 2^{1011}$, $y = 2^{1010}$. Дакле, једино решење је $(x, y) = \left(2^{1011}, 2^{1010}\right)$.

5. Одговор: $n = 4k$, за неко $k \in \mathbb{N}$, или је $n = 4k + 3$, за неко $k \in \mathbb{N}_0$. Претпоставимо да за дато $n \in \mathbb{N}$ важе услови задатка. Како је сваки пут двосмерна веза између два различита града, чији су крајеви та дава града, укупан број путева је тачно половина од броја $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, тј. $\frac{n(n+1)}{4}$. Дакле, $4 \mid n(n+1)$, те како су n и $n+1$ различите парности, мора важити $4 \mid n$ или $4 \mid n+1$. Ако важи да $4 \mid n$, тада је $n = 4k$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Доказаћемо да за $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, имамо повезивање градова, које ћемо без губитка општости означити бројевима $1, 2, \ldots, 4k$, које испуњава услове задатка. Поделимо, сада, све означене градове на тачно k група $\{1, 2, 3, 4\}, \ldots, \{4k - 3, 4k - 2, 4k - 1, 4k\}$. Свака група је облика $\{4l - 3, 4l - 2, 4l - 1, 4l\}$, за неко $l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant k$. У оквиру групе $\{4l - 3, 4l - 2, 4l - 1, 4l\}$, градове означене бројевима $4l - 3$ и $4l - 2$ спојимо са тачно $4l - 3$ путева, градове означене бројевима $4l - 1$ и $4l$ ћемо спојити са тачно $4l - 1$ путева, док ћемо градове означена са $4l$ и $4l - 2$ спојити само са једним путем. Лако се проверава да смо на овај начин добили конфигурацију путева која испуњава услове задатка. Ако $4 \mid n+1$, тј. ако је $n = 4k+3$, за неко $k \in \mathbb{N}_0$, тада ћемо извршити потпуно исто упаривање за градове означене бројевима $1, 2, \ldots, 4k$, док ћемо градове означене бројевима $4k + 1$ и $4k + 2$ спојити са тачно $2k$ путева, односно, градове означене бројевима $4k + 1$ и $4k + 3$ ћемо спојити са тачно $2k + 1$ путева. Коначно, градове са редним бројевима $4k + 2$ и $4k + 3$ спајамо са тачно $2k + 2$ путева. Дакле, и у овом случају, тј. за $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$, имамо конфигурацију градова и путева која задовољава услове задатка.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - А категорија

1. Нека је $n = (p-2)!!^2 + 1$. На основу Вилсонове теореме, како је $p = 4k+1$, имамо да је

$$n \equiv_p (p-2)!! \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot ... \cdot (-(p-1)) + 1,$$

односно

$$n \equiv_p (p-2)!! \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (p-1)!! + 1 \equiv_p (p-1)! + 1 \equiv_p -1 + 1 \equiv_p 0,$$

одакле следи да $p \mid n$. Број n је, као збир квадрата два непарна броја, дељив са 2, али није дељив са 4. Претпоставимо сада да је $\tau(n) < 8$. То би значило да n има највише два проста делиоца (из формуле за функцију τ је очигледно да сваки број који има барем три проста фактора у својој канонској факторизацији има најмање 8 делилаца). Отуда, како $2^1 \mid\mid n$, имамо да је $n = 2^1 \cdot p^\alpha$, где је $\alpha \leqslant 2$. Стога,

$$4p^2 > 2p^2 \geqslant n > (p-2)^2(p-4)^2 \Rightarrow 2p > (p-2)(p-4).$$

Из последње неједнакости лако налазимо $p < 7$. Контрадикција.

2. Нека је $L = x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6$ и $R = \sqrt{x^3-4} + \sqrt{3x^3-20} + 2\sqrt{9-x^3} = \sqrt{x^3-4} + \sqrt{3x^3-20} + \sqrt{36-4x^3}$. Израз R је дефинисан за $x \in [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{9}]$. Стога, можемо да применимо неједнакост између аритметичке и квадратне средине, из чега добијамо

$$\frac{\sqrt{x^3-4} + \sqrt{3x^3-20} + \sqrt{36-4x^3}}{3} \leqslant \sqrt{\frac{(x^3-4) + (3x^3-20) + (36-4x^3)}{3}} = 2,$$

односно $R \leqslant 6$. Како имамо да важи $L \geqslant 6$ и $R \leqslant 6$, добијамо да мора да важи $L = 6$ и $R = 6$, тј. $x = 2$. Директном провером добијамо да то јесте решење.

3. Доказаћемо да Бранко има победничку стратегију. Упаримо сва поља табле тако да за сваки пар важи да скакач у једном потезу може доћи са поља на поље које је његов пар. На слици је приказано како се поља таблица 4×2 и 3×4 могу упарити на жељени начин (поља означена истим бројем представљају пар).

3	4	1	2
1	2	3	4

4	5	3
3	1	6
2	4	5
1	6	2

Табла 2023×2024 може се лако поплочати таблицама 4×2 и 3×4 (таблицама 4×2 очигледно се може поплочати 2020×2024, а таблицама 3×4 може се поплочати преостали део 3×2024). Из свега наведеног закључујемо да се сва поља табле 2023×2024 могу упарити на жељени начин. Бранко у првом потезу помера скакача на поље које је пар почетном пољу. Бранко у свим наредним потезима скакача ставља на поље које је пар пољу на које је Аца ставио скакача у свом (до тада) последњем потезу. Тиме Бранко увек има "одговор" на Ацин потез. Зато, како се може одиграти коначно много потеза, у неком тренутку Аца неће моћи да одигра потез, чиме ће игру добити Бранко.

4. Приметимо да је $2401 = 7^4$. Записаћемо број 22^n као $22^n = (1 + 3 \cdot 7)^n$. На основу претходног и биномне формуле, за $n \geqslant 4$, важи

$$22^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot 3 \cdot 7 + \binom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot 7^2 + \binom{n}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^3 + \binom{n}{4} \cdot 3^4 \cdot 7^4 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot 3^n \cdot 7^n$$

$$= 1 + \binom{n}{1} \cdot 3 \cdot 7 + \binom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot 7^2 + \binom{n}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^3 + 7^4 \cdot k,$$

за неки природан број k. Ставимо да је

$$Q(n) = -1 - \binom{n}{1} \cdot 3 \cdot 7 - \binom{n}{2} \cdot 3^2 \cdot 7^2 - \binom{n}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^3$$

$$= -1 - \frac{5775}{2}n + 4410n^2 - \frac{3087}{2}n^3, \ n \in \mathbb{N}.$$

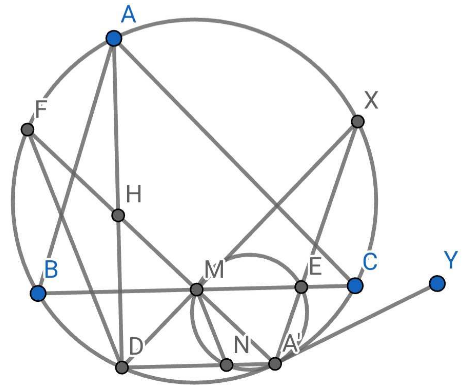
Очигледно је да полином $Q(n)$ узима целобројне вредности, за свако $n \in \mathbb{N}$, као и да за њега важи да је $Q(n) + 22^n \equiv 0 \pmod{7^4}$, за $n \geqslant 4$. Међутим, полином $Q(n)$ није полином са целобројним коефицијентима. Стога, дефинишимо полином P захтевом: $P(n) = 2402Q(n) = -2402 - 6935775n + 10592820n^2 - 3707487n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Јасно је да је полином P са целобројним коефицијентима и при томе важи

$$P(n) + 22^n = 2402Q(n) + 22^n = 2401Q(n) + (Q(n) + 22^n) \equiv 0 \pmod{7^4},$$

за свако $n \geqslant 4$. Провером се утврђхеује да полином P задовољава услове задатка и за $n = 1$ ($P(1) + 22 = -22 \cdot 2401$), $n = 2$ ($P(2) + 22^2 = -484 \cdot 2401$) и $n = 3$ ($P(3) + 22^3 = -10648 \cdot 2401$).

5. ПРВО РЕШЕЊЕ: Нека је X пресек правих DM и $A'E$. Треба доказати да се X налази на кругу k, односно да је $\sphericalangle DXA' = \sphericalangle DAA' = \beta - \gamma$. Важи: $\sphericalangle DXA' = \sphericalangle MEA' - \sphericalangle EMX$. $\sphericalangle MEA' = \sphericalangle EA'C + \sphericalangle ECA' = \sphericalangle EA'C + 90^\circ - \gamma$. Нека је Y тачка на заједничкој тангенти у A' две кружнице, као на слици. Тада је $\sphericalangle EA'C = \sphericalangle EA'Y - \sphericalangle CA'Y = \sphericalangle EMA' - \sphericalangle A'AC = \sphericalangle EMA' - (90^\circ - \beta)$, где смо користили чињеницу да је YA' тангента на кружнице. Комбинујући претходне једнакости добијамо да је $\sphericalangle DXA' = \beta - \gamma + \sphericalangle EMA' - \sphericalangle EMX$. Дакле, остаје да покажемо да је $\sphericalangle EMX = \sphericalangle EMA'$. Последња једнакост важи зато што су тачке H, M и A' колинеане (H је ортоцентар троугла ABC) и зато што су H и D симетричне у односу на BC па је $\sphericalangle HMB = \sphericalangle DMB$. Овим је доказ завршен.

ДРУГО РЕШЕЊЕ: Нека је N пресек $A'D$ и кружнице описане око троугла MEA' и нека је F пресек праве $A'M$ и кружнице k. Како је $A'D||BC$ ($\sphericalangle BAD = \sphericalangle A'AC = 90^\circ - \beta$), четвороугао $MNA'E$ је тетиван трапез, па је једнакокрак. С обзиром да се две кружнице додирују у тачки A', хомотетија која слика кружницу $MA'E$ у кружницу k шаље праву MN у праву DF па је $MN||DF$. Сада је $\sphericalangle FDA' = \sphericalangle MNA' = \sphericalangle DA'E$ што заједно уз чињеницу да су D и A' симетричне у односу на симетралу дужи BC даје да су праве DF и $A'E$ симетричне у односу поменуту симетралу. Како исто важи и за праве MA' и MD, то се праве DM и $A'E$ секу у тачки симетричној тачки F у односу на симетралу дужи BC, која се такође налази на кружници k. Овим је доказ завршен.



Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - А категорија

1. Бројеви A и B, свакако, зависе од n. Зато, ставимо да је за фиксирано $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $A = A_n$ и $B = B_n$. Што се одређивања броја A_n тиче, имамо да свако од n темена може да се обоји било којом од дате 3 дате боје, те је $A_n = 3^n$.
Одредимо колико је B_n. За $n = 3$, прво теме можемо обојити било којом бојом од дате 4 боје, друго теме не може истом бојом као прво, одакле следи да за њега имамо тачно 3 могућности, док за последње, треће теме, не можемо корисити ниједну од боја које смо искористили за бојење прва два темена, те ту остају само две могућности. Дакле, $B_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
За $n = 4$ имамо два случаја, у зависности од тога како смо обојили треће теме. Ако је оно обојено истом бојом као и прво теме, тада четврто теме можемо обојити било којом другом бојом, тј. то можемо урадити на $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ начина. Ако је обојено различитом бојом од првог темена, онда можемо на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ начина. Дакле, укупно имамо $B_4 = 36 + 48 = 84$ могућности.
Нека је $n \geqslant 5$. Одредимо колико је B_n у том случају. Означимо темена $n-$тоугла са $T_1, T_2, \ldots, T_n$, редом. Разликоваћемо два случаја, у зависности од чињенице како су обојена темена T_1 и T_{n-1}.
1° (темена T_1 и T_{n-1} су обојена истом бојом): Тада је теме T_{n-2} обојено различитом бојом од претходно уочена два темена. Јасно је да то можемо учинити на B_{n-2} начина, па је то и број начина да обојимо првих $n-1$ темена тако да су темена T_1 и T_{n-1} обојена истом бојом. Одавде следи да преостало теме, тј. теме T_n, можемо обојити било којом од остале три боје (мора бити обојено различито од боје темена T_1 и T_{n-1}, који су истобојни). Дакле, у овом случају укупно имамо $3B_{n-2}$ могућих бојења.
2° (темена T_1 и T_{n-1} су обојена различитим бојама): Тада је број начина да обојимо првих $n-1$ темена, код којих су темена T_1 и T_{n-1} обојена различитим бојама, једнак B_{n-1}. Преостало теме T_n можемо обојити било којом од преостале две боје (мора бити различито од боја темена T_1 и T_{n-1}). Дакле, у овом случају укупно имамо $2B_{n-1}$ бојења.
На основу претходног добијамо рекурентну формулу $B_n = 2B_{n-1} + 3B_{n-2}$, $n \geqslant 5$, са почетним условима $B_3 = 24$ и $B_4 = 84$. Даље, стандардним поступком за решавање

рекурентних једначина (диференцних једначина) добијамо да је карактеристична једначина исте: $t^2-2t-3=0$, чија су решења $t_1=-1$ и $t_2=3$. Стога је $B_n=\alpha\cdot(-1)^n+\beta\cdot 3^n$, $n\geqslant 3$, при чему се константе α и β одређују из услова $B_3=24$ и $B_4=84$. Тривијално, након кратког рачуна добијамо $\alpha=3$ и $\beta=1$, тј. $B_n=3\cdot(-1)^n+3^n$, $n\geqslant 3$. Коначно, за n парно је $B_n>A_n$, при чему је $B_n-A_n=3$. Ако је n непарно, тада је $A_n>B_n$, при чему је, исто, $A_n-B_n=3$.

2. За фиксиран природан број n посматрајмо функцију $f_n:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, дефинисану са $f_n(x)=n\sin x+\operatorname{tg}x-(n+1)x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2})$. Испитајмо монотонст функције f_n. Како је

$$f_n'(x)=n\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-n-1=\frac{n(\cos^3 x-\cos^2 x)+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x-n\cos^2 x)}{\cos^2 x},$$

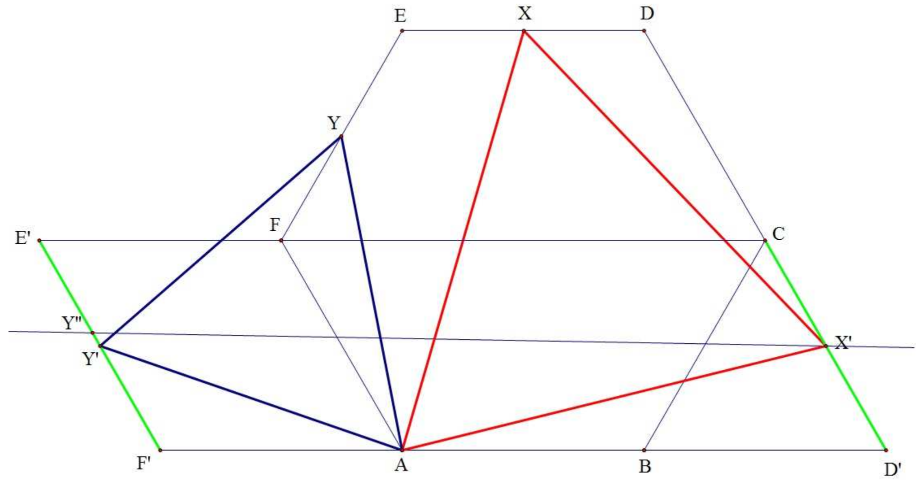
разликујемо следеће случајеве:

1° $n=1$: Очигледно је $f_1'(x)>0$, за свако $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, па је посматрана функција строго растућа. Отуда, за $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи $f_1(x)>f(0)=0$, па је $n=1$ једно решење.

2° $n=2$: Тада је $f_2'(x)=\frac{(1-\cos x)^2(1+2\cos x)}{\cos^2 x}>0$, за свако $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, па је посматрана функција строго растућа. Отуда, за $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи $f_2(x)>f(0)=0$, па је $n=2$ једно решење.

3° $n\geqslant 3$: Нека је $a_1=\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2n}$ и $a_2=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2n}$. Тада је $a_2=\frac{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n}}}{2}\leqslant\frac{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{3^2}+\frac{4}{3}}}{2}<\frac{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}<1$, док је очигледно $a_1<0<a_2$. Зато је $1+\cos x-n\cos^2 x=-n(\cos x-a_1)(\cos x-a_2)<0$, за свако $x\in(0,\arccos a_2)$, па је функција f_n строго опадајућа на $(0,\arccos a_2)$. Отуда је $f(a_2)<f(0)=0$, те бројеви $n\geqslant 3$ нису решења задатка. Овим смо доказали да су једина решења задатка $n=1$, односно, $n=2$.

3. Нека је $AB=a$, $EX=x$ и $EY=y$. Уочимо тачке F',D' и E', такве да важи распоред тачака $F'-A-B-D'$ и $E'-F-C$, при чему је $F'A=BD'=E'F=a$. Посматрајмо ротацију за 60° (у позитивном смеру) око тачке A. Том ротацијом тачке E,Y и F пресликавају се, редом, у тачке E',Y' и F'. Из колинеарности E,Y и F следи колинеарност E',Y' и F', при чему је распоред $E'-Y'-F'$ и важи $E'Y'=y$. Са друге стране, посматраном ротацијом, тачке D',X' и C пресликавају се, редом, у D,X и E. Из колинеарности тачака D,X и E следи и колинеарност тачака D',X' и C, при чему важи распоред тачака $D'-X'-C$ и $X'C=x$. Дакле, у паралелограму $F'D'CE'$, где је $F'D'=3a$ и $D'C=a$, имамо тачке X' и Y', редом, на страницама $D'C$ и $F'E'$, при чему важи $X'Y'=3a$. Констришимо кроз X' праву паралелну са AB. Нека је Y'' пресечна тачка те праве и дужи $F'E'$. Тада је $E'Y''=x$. Претпоставимо да је $x>y$. Тада је троугао $Y'Y''X'$ једнакокраки ($Y'X'=Y''X'$) са углом на основици од 120°, што доводи до контрадикције. Претпоставимо, даље, да је $y>x$. Тада је троугао $Y'Y''X'$ једнакокраки ($Y'X'=Y''X'$) са углом на основици од 60°, па би важило $3a=X'Y'=Y'Y''<F'E'=a$, што је такође контрадикција. Из свега наведеног закључујемо да је $x=y$, што је и требало доказати.



4. Приметимо да је $-1 \equiv 24 \equiv 2024 \pmod{25}$, па је и $P(-1) \equiv P(24) \equiv P(2024) \pmod{25}$. Даље, како $(5-1) = 4 \mid 24$ и $4 \mid 20$, по малој Фермаовој теореми закључујемо да $P(24)^{20}$ и $P(20)^{24}$ могу бити конгруентни само са 0 или 1 по модулу 5, па и $P(2024)$ може бити конгруентно само са $0, 1, 2 \pmod{5}$, што искључује $P(-1) = -7$ и $P(-1) = -6$.

Претпоставимо да је $P(-1) = -4$, односно да су $P(24) \equiv P(2024) \equiv -4 \pmod{25}$, односно $1 \pmod{5}$. Тада је нужно $P(20)^{24} \equiv 0 \pmod{5}$, односно $P(20) \equiv 0 \pmod{5}$, па је и $P(20)^{24} \equiv 0 \pmod{25}$. Ипак, како је $\varphi(25) = 20$, где је φ Ојлерова функција, из Ојлерове теореме добијамо да је $1 \equiv P(24)^{20} \equiv P(2024) \equiv -4 \pmod{25}$, што даје контрадикцију.

Коначно, када би $P(-1) = -5$, оба $P(24)^{20}$ и $P(20)^{24}$ би морала бити дељива са 5, па би оба морала бити дељива и са 25, одакле би $-5 \equiv P(2024) \equiv 0 \pmod{25}$, што нам још једном даје контрадикцију.

5. Посматраћемо три случаја.
1° $x \in (0,1)$: Ставимо да је $n = 2$ и $x_1 = x, x_2 = \frac{x}{\{x\}} = \frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Z}$.
2° $x \in \mathbb{Q}$: Ако је x цео, довољно је узети $n = 1$ и $x_1 = x \in Z$. Претпоставимо да постоји рационалан број, који није цео, $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $q \geqslant 2$, за који не важе услови задатка. Тада, постоји и рационалан број са претходном особином, који има најмањи именилац (скуп свих именилаца рационалних бројева са претходном особином је подскуп скупа $\mathbb{N}$, те има најмањи елемент). Означимо га, поново, са $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $q \geqslant 2$, за неко $p \in \mathbb{Z}$. Тада, $p = bq + r$, где је r остатак при дељењу броја p са q, $0 < r < q$, $r \in \mathbb{N}$. Следи, $\frac{\frac{p}{q}}{\{\frac{p}{q}\}} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{q}} = \frac{p}{r}$. За овај рационалан број, тј. за $x' = \frac{p}{r}$ постоји природан број m и коначан низ реалних бројева $y_1, y_2, ..., y_m$ такав да је $y_1 = x'$, $y_{k+1} = \dfrac{y_k}{\{y_k\}}$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, при чему је $y_m \in Z$. Међутим, стављајући $n = m+1$ и $x_1 = x = \frac{p}{q}$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2, \ldots, x_{m+1} = y_m \in \mathbb{Z}$, добијамо да и рационалан број $x = \frac{p}{q}$ задовољава услове задатка, што је контрадикција. Дакле, рационални бројеви задовољавају услове задатка.
3° $x \notin \mathbb{Q} \cup (0,1)$: Претпоставимо да за дато x, у овом случају, постоји природан број n (јасно је да је $n \geqslant 2$, јер x није цео) и коначан низ реалних бројева $x_1, x_2, ..., x_n$ такав да је $x_1 = x$, $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{\{x_k\}}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, при чему је $x_n \in Z$. Како је x_n цео, он је и рационалан, те постоји најмање $k \in \{1, 2...., n\}$, такво да је x_k рационалан. Очигледно је $k > 1$, јер $x_1 = x$ није цео, одакле је $x_k = \frac{x_{k-1}}{\{x_{k-1}\}}$. Дакле, $x_k \in \mathbb{Q}$, тј. $\frac{x_{k-1}}{\{x_{k-1}\}} \in \mathbb{Q}$. Како је

$$\frac{x_{k-1}}{\{x_{k-1}\}} = \frac{\lfloor x_{k-1} \rfloor + \{x_{k-1}\}}{\{x_{k-1}\}} = 1 + \frac{\lfloor x_{k-1} \rfloor}{\{x_{k-1}\}},$$

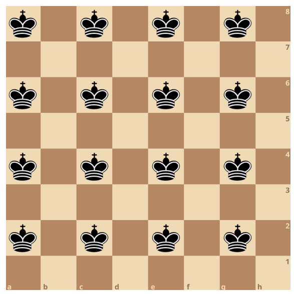
добијамо да је $\frac{\lfloor x_{k-1} \rfloor}{\{x_{k-1}\}} \in \mathbb{Q}$. Сада, уколико је $\lfloor x_{k-1} \rfloor \neq 0$, то је и $\frac{1}{\{x_{k-1}\}} \in \mathbb{Q}$, одакле је и сам разломљени део броја x_{k-1} рационалан, те је и сам број x_{k-1}, такође, рационалан, што је контрадикција. Са друге стране, ако је $\lfloor x_{k-1} \rfloor = 0$, тада је $x_{k-1} \in [0, 1)$ и $n \neq k-1$, одакле следи да број x_{k-1} није цео, тј. важи $x_{k-1} \in (0, 1)$. Очигледно је у овој ситуацији $n \geqslant 3$, јер за $n = 2$ бисмо имали $x_1 = x \notin \mathbb{Q}$ и $x_2 = \frac{x}{\{x\}} \in \mathbb{Z}$, тј. $k = 2$, $k - 1 = 1$, па би морало важити $x_{k-1} = x_1 \in (0, 1)$, што не може. Дакле, $n \geqslant 3$, те се може наћи индекс $k - 2$, за који је испуњено $0 < \frac{x_{k-2}}{\{x_{k-2}\}} = x_{k-1} < 1$. Следи $x_{k-2} < \{x_{k-2}\}$, као и $x_{k-2} > 0$, што је немогуће.

Дакле, $x \in \mathbb{Q} \cup (0, 1)$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. Приметимо да се ни у једном 2×2 квадрату на табли не могу наћи два краља, јер би се они тада међусобно нападали. Како таблу 8×8 можемо једноставно поделити на 16 дисјунктних квадрата димензије 2×2, и како се у сваком од њих може наћи највише један краљ, то на табли може бити највише 16 краљева. Пример са 16 краљева се може постићи као на слици испод.



2. Означимо са p исказ „Младен купује купине“. Тада је негација исказа p, тј. исказ $\neg p$ заправо исказ „Младен не купује купине“, тј. „Младен купује малине“). Такође, означимо са q исказ „Растко купује купине“, као и са r исказ „Иван купује купине“. Тада, дате реченице можемо записати као:

1° $\neg p \;\Rightarrow\; (q \;\Leftrightarrow\; r)$.

2° $\neg q \;\Rightarrow\; (r \veebar p)$.

3° $r \;\Rightarrow\; (p \;\Leftrightarrow\; r)$.

Направимо одговарајућу таблицу истинитости:

p	q	r	$\neg p$	$q \Leftrightarrow r$	1°	$\neg q$	$r \veebar p$	2°	$p \Leftrightarrow r$	3°	$1^\circ \wedge 2^\circ \wedge 3^\circ$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1

Како смо добили барем једну јединицу у последњој колони, то су дате изјаве непротивречне. Са друге стране, како немамо тачно једну јединицу у последњој колони, то не можемо за сву тројицу установити ко шта купује. Међутим, можемо видети шта је заједничко за све валуације исказа p, q и r, које дају јединицу у последњој колони. Јасно је да је у питању вредност исказа p, која је у све три варијанте једнака 1. Дакле, знамо да Младен купује купине.

3. Нека је γ угао у темену C троугла ABC. Из услова задатка је и $\sphericalangle AED = \gamma$, јер је троугао AEC једнакокраки. Означимо са F пресек правих AE и MD. Из претходног је и $\sphericalangle FED = \gamma$, јер су тачке A, F и E колинеарне. Јасно је да је троугао BDH правоугли, са правим углом у темену D, одакле заљкучујемо да је $MB = MH = MD$, јер је M средиште хипотенузе, тј. дужи BH, тог правоуглог троугла. Дакле, $\sphericalangle BDM = \sphericalangle MBD = 90^\circ - \gamma$. Како су тачке B, E и D колинеарне и у наведеном распореду, то је $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EDM = \sphericalangle BDM = 90^\circ - \gamma$. Дакле, троугао EDF је правоугли са правим углом у темену F, односно, права NF, тј. права AE, је нормална на праву MD. Са друге стране, како је тачка N средиште дужи AE, а тачка D средиште дужи EC, то је дуж ND средња линија троугла AEC, одакле следи да је права ND паралелна правој AC, па је самим тим и нормална на праву BH. Дакле, важи MS је права нормална на ND. Коначно, ако посматрамо троугао MDN, видимо да су праве MS и NS, тј. MS и NF, његове висине, које се секу у тачки S. Дакле, тачка S је ортоцентар троугла MDN, одакле следи да је права DS његова трећа висина. Дакле, DS је нормално на MN.

4. Прво, приметимо да је функција $f : [0, 1) \to (0, 2]$ бијекција. При томе важи $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$, за свако $x \in [0, \frac{1}{2}]$, као и $0 < f(x) < 1$, за свако $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.
(а) Из претходног, ако је x решење неједначине $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$, тада је $x \in [0, \frac{1}{2}]$, па из претходног добијамо да је $f(x) = 2x + 1 \geqslant \frac{3}{2}$, тј. $x \geqslant \frac{1}{4}$. Дакле, решења неједначине су сви реални бројеви из затвореног интервала $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
(б) Нека је $y = f(x)$, $x \in [0, 1)$. Тада је $y \in (0, 2]$, па ћемо посматрати два случаја.
1° $y \in (0, 1)$: Нађимо оно x из домена функције f за које је $f(x) = y \in (0, 1)$. Очигледно је тада $\frac{1}{2} < x < 1$, одакле је $y = f(x) = 2x - 1$, тј. $x = \frac{y+1}{2}$.
2° $y \in [1, 2]$: Одредимо сада оно x из домена функције f за које је $f(x) = y \in [1, 2]$. Јасно је да је тада $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, одакле добијамо да је $y = f(x) = 2x + 1$, тј. $x = \frac{y-1}{2}$.
Дакле, инверзна функција $f^{-1} : (0, 2] \to [0, 1)$ функције f је одређена са

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & \text{ако је } 0 < y < 1, \\ \frac{y-1}{2}, & \text{ако је } 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

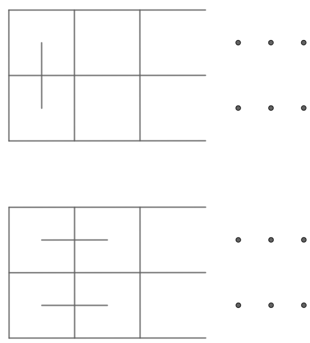
5. Видимо да је $\overline{abc} + \overline{cba} = 101(a + c) + 20b$, као и $\overline{def} + \overline{fed} = 101(d + f) + 20e$. Дакле, важи $101(a + c) + 20b = 101(d + f) + 20e$, тј. $101(a + c - d - f) = 20(e - b)$, $a \cdot c \cdot d \cdot f \neq 0$. Из претходне једнакости видимо да број 101 мора да дели $20(b - e)$. Међутим, број 101 је прост и не дели 20, одакле закључујемо да 101 мора да дели $b - e$. Како је овај број између -9 и 9 (у питању су цифре), тада та разлика мора бити 0, као једини број у том опсегу који је дељив са 101. Дакле, $b = e$ (као и $a + c = d + f$).

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

1. Представимо сто као таблу димензије 2×15. Приметимо да два места једно до другог или једно преко пута другог у поставци задатка заправо одговарају домини димензије 1×2 на посматраној табли. Зато ћемо прво пребројати број начина да поменуту таблу поплочамо доминама, које нам сада представљају парове. Ако са a_n означимо број начина да таблу $2\times n$ поплочамо доминама, лако добијамо да за $n\geqslant 3$ важи $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$. Заиста, доње лево поље можемо поплочати усправном домином, одакле, постављајући је, смо таблу смањили на таблу димензије $2\times(n-1)$, или хоризонталном, одакле следи да у том случају и изнад ње мора стајати хоризонтална домина, па смо таблу заправо смањили на таблу димензије $2\times(n-2)$ (слика). Како је $a_1=1$ и $a_2=2$, што је тривијално, лако рачунамо да је $a_{15}=987$. Пошто сада у сваку домину можемо распоредити мужа и жену на два начина (није битно ко је у ком пољу које је домина покрила) - на 2^{15} начина, а и парове можемо распоредити на било који начин (није битно ком пару одговара која домина) - на $15!$ начина, добијамо коначно решење $987\cdot 2^{15}\cdot 15!$.



2. Нека је $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$, за свако $x\in\mathbb{R}$. С обзиром да је функција f позитивна за све реалне бројеве x, специјално важи $c=f(0)>0$. Разликујемо следеће случајеве:

1° $a=0$: Уколико је $b\neq 0$, онда је $f(-\frac{c}{b})=0$, што је у супротности са условом. Дакле, ако је $a=0$, онда је и $b=0$. Како је $c>0$, онда је заиста $g(x)=cx^2\geqslant 0$, за свако $x\in\mathbb{R}$.

2° $a\neq 0$: Из услова позитивности квадратне функције f, за свако $x\in\mathbb{R}$, имамо да је $D_f=b^2-4ac<0$. Због $c>0$ имамо да је g квадратна функција, а њена дискриминанта је $D_g=b^2-4ca=D_f<0$. Дакле, g је квадратна функција која је конвексна (због $c>0$) и чија је дискриминанта мања од нуле. Зато је функција g строго позитивна за све реалне бројеве, те важи и неједнакост $g(x)\geqslant 0$.

3. Уочимо тачку C_1 на полуправој DC, са почетком у тачки D, такву да је $DC_1=AX$. Уколико се тачка C_1 поклапа са тачком C, онда су углови $\sphericalangle ADX, \sphericalangle DXC$ и $\sphericalangle XCB$ углови са паралелним крацима, те су њихове симетрале паралелне. Размотримо, сада, случајеве када се тачке C_1 и C не поклапају. Како се из тачака C_1 и C дуж XB види под једнаким угловима, при чему су поменуте тачке са исте стране праве XB, закључујемо да тачке X, B, C_1 и C припадају једној кружници. Нека је p симетрала дужи AB, $\alpha=\sphericalangle DAB$ и $\beta=\sphericalangle CBA$. Уколико је тачка C_1 између тачака D и C, имамо да је $\sphericalangle XC_1C=180^\circ-\alpha$ (јер је четвороугао AXC_1D паралелограм), док, због тетивности четвороугла $XBCC_1$, важи и $\sphericalangle XC_1C + \beta = 180°$. Зато је $\alpha = \beta$, односно трапез $ABCD$ је једнакокрак. У случају да важи распоред тачака $D - C - C_1$, због тетивности је $\beta = \sphericalangle XC_1C$, као и $\sphericalangle XC_1C = \alpha$ (јер је четвороугао AXC_1D паралелограм), те је и у овом случају $ABCD$ једнакокраки трапез. Како су сада симетрале углова $\sphericalangle ADX$ и $\sphericalangle XCB$ симетричне у односу на праву p, која је уједно и симетрала угла $\sphericalangle DXC$, то се оне секу на p или су паралелне са p.

4. Како је CE тежишна дуж, то је $AE = EB$, те како је $ED \perp AB$, то је троугао ABD једнакокрак. Дакле, $AD = BD$ и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$, одакле следи да је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC$ (спољашњи угао троугла је једнак збиру два несуседна унутрашња угла тог троугла). Стога, троуглови ABC и DAC су слични. Одавде је $AD : AB = CD : AC = AC : BC$, тј. $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ и $CD = \frac{AC^2}{BC}$. Даље имамо да је $BC = BD + CD = AD + CD = \frac{AB \cdot AC + AC^2}{BC}$, тј. $AB \cdot AC = BC^2 - AC^2$. Како је F подножје нормале из тачке C на праву AB, то је $AC^2 = AF^2 + CF^2$, па је $BC^2 = CF^2 + BF^2 = CF^2 + (AB - AF)^2 = CF^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AF + AF^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AF$, одакле следи $AB \cdot AC = BC^2 - AC^2 = AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AF$, тј. $AC = AB - 2AF$, одакле следи тврђење.

5. Како је $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, то је $2024^n = 2^{3n} \cdot 11^n \cdot 23^n$, одакле закључујемо да је укупан број природних делилаца броја 2024^n једнак $(3n+1)(n+1)(n+1) = (3n+1)(n+1)^2 = 160$. Одредимо природан број n, који задовољава претходну једначину. Како је $(3n+1)(n+1)^2 = 3n^3 + 7n^2 + 5n + 1 > 3n^3 > 3 \cdot 64 > 160$, за $n \geqslant 4$, то је довољно испитати да ли постоји решење за $n = 1$, $n = 2$ или $n = 3$. Тривијално се проверава да $n = 3$ јесте решење.

Трећи разред - Б категорија

1. Приметимо да је

$$\begin{aligned} \sin\alpha - \cos\alpha &= 2023(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) \\ &= -2023\cos(\beta+\gamma). \end{aligned}$$

Из троугла $\triangle ABC$ имамо да је $\alpha = \pi - \beta - \gamma$. Заменом у претходни израз добијамо

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -2023\cos(\pi - \alpha) = 2023\cos\alpha.$$

Коначно, заменом добијамо да је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2024\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2024$, те је

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 4096576.$$

2. Уколико се тачке X и Y поклапају, свакако леже на кругу са A и D. Претпоставимо зато да су X и Y различите. Претпоставимо да праве BC и AD нису паралелне и нека је E њихов пресек. Без умањења општости можемо претпоставити да су распореди тачака $E - D - A$ и $E - C - B$. Тада је X центар уписане кружнице троугла EAB, па се налази на симетрали унутрашњег угла код темена E тог троугла. Слично је Y центар споља приписане кружнице наспрам темена E троугла EDC, па се и Y налази на симетрали унутрашњег угла код темена E тог троугла, односно E, X, Y су колинеарне тачке. Нека је $\sphericalangle A = 2\alpha$, $\sphericalangle D = 2\beta$. Тада, једноставним рачуном углова налазимо:

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle AEX + \sphericalangle EAX = \alpha + \frac{1}{2}\sphericalangle AEB =$$

$$= \alpha + \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - 2\beta)) = \alpha + (\beta - \alpha) = \beta = \sphericalangle ADY,$$

одакле закључујемо да је четвороугао $DAXY$ заиста тетиван. Када су праве AD и BC паралелне, четвороугао $ABCD$ је једнакокраки трапез, па је и $DAXY$ једнакокраки трапез, односно тетиван четвороугао.

3. (а) Претпоставимо да је један ученик пријатељ са свима (остали могу да се пре журке не познају), тј. са осталих $n-1$ особа. Тада ће сви након журке бити пријатељи, што нам даје $n-1$ пријатељстава у овом случају. Са друге стране, претпоставимо да је минималан број пријатељстава, који је потребан да би важио услов у делу (а), једнак m, $m \leqslant n-1$, тада, ако би сваки ученик пре журке био пријатељ са барем два друга ученика, тада би укупан број пријатељстава на почетку био барем n, што не може. Стога, постоји ученик који је пре журке имао највише једног пријатеља. Уколико он није имао пријатеља уопште, тада на журци неће упознати никог, што је немогуће. Дакле, он мора имати тачно једног пријатеља пре журке. Коначно, да би он био пријатељ са свим ученицима након журке, тада ученик којег је једино познавао пре журке мора бити пријатељ са свим осталим оченицима пре журке. Дакле, m је барем $n-2+1 = n-1$. Стога, минималан број пријатељстава је $n-1$ у овом случају.
(б) Докажим да је у овом случају максималан број пријатељстава на почетку једнак $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Претпоставимо да неки ученик није пријатељ ни са једним од ученика на

почетку, тј. пре журке, те да се сви остали (остало их је $n-1$) међусобно познају. Тада, након журке, тај ученик и било који други неће бити пријатељи, а број пријатељстава је управо $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Да би након журке нека два ученика, рецимо ученици A и B, и даље остали неупознати, тј. нису постали пријатељи, тада конфигурација пријатељстава на почетку мора изгледати тако да за сваког ученика C, $C \neq A$, $C \neq B$, у троуглу ABC мора недостајати „страница“ AB (јер нису пријатељи) и барем једна од „страница“ BC или CA (могу и обе). Како различитих троуглова облика ABC имамо $n-2$, те како се из сваког избацује барем једна страница различита од AB, као и сама страница AB, то је укупан број пријатељстава пре журке највише $\frac{n(n-1)}{2} - (n-2+1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Дакле, максималан број пријатељстава је $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ у овом случају.

4. Нека је $a = 13$ и $\alpha = 120°$. Претпоставимо, без умањења општости, да је $b \geqslant c$. Тада, на основу косинусне теореме, важи

$$13^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 + bc = (b-c)^2 + 3bc.$$

Вредност за $b-c$ може да буде било која из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, јер је a најдужа (остале су строго мање) страница полазног троугла (наспрам ње је туп угао). Ако је $b - c = 1$, тада је $bc = 56$, одакле заменом налазимо да је $b = c + 1$, одакле је $0 = c^2 + c - 56 = (c+8)(c-7)$, што даје решење $b = 8$ и $c = 7$. Аналогно се проверавају сви остали случајеви из којих добијамо да не постоји други троугао који испуњава дате услове (неки случајеви могу лако да се одбаце, посматрањем по модулу 3 или модулу 5). Према томе, површина троугла је

$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2} = 14\sqrt{3}.$$

5. Очигледно је $2^{3^{2024}} \equiv 0 \pmod 4$, док је $3^{2024} = 3^{2\cdot 1012} = (3^2)^{1012} = 9^{1012} \equiv 1 \pmod 4$, као и $3^{2024} = 3^{4\cdot 506} = (3^4)^{506} = 81^{506} \equiv 1 \pmod 5$. Очигледно је и $3^{2024} = 81^{506} \equiv 1 \pmod{20}$, тј. $3^{2024} = 20a + 1$, за неки природан број a, одакле следи да је $2^{3^{2024}} = 2^{20a+1} = 2 \cdot 2^{20a} = 2 \cdot (2^{10})^{2a} = 2 \cdot (1024)^{2a} \equiv 2 \pmod{25}$, јер је $2a$ паран. Дакле, број $2^{3^{2024}}$ је облика $25b + 2$, за неко (велико) природно b, тј. $2^{3^{2024}} = 25b + 2$ и дељив је са 4. Стога, b не може давати остатке 0, 1 или 3 при дељењу са 4, већ искључиво 2. Следи $2^{3^{2024}} = 25b + 2 \equiv 52 \pmod{100}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Четврти разред - Б категорија

1. Нека су решења дате јадначине означена са a, $b = a+d$ и $c = b+d$. Како они чине аритметичку прогресију, имамо да је $a+c = 2b$, што са Виетовом формулом $a+b+c = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{-63}{9} = 7$ даје $b = \frac{7}{3}$. Из Виетове формуле $a \cdot b \cdot c = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{-56}{9} = \frac{56}{9}$, како је $b = \frac{7}{3}$, добијамо да је $a \cdot c = \frac{8}{3}$. Како они чине аритметичку прогресију, имамо да је $a = b-d$, а $c = b+d$, одакле добијамо да је $(\frac{7}{3}-d)\cdot(\frac{7}{3}+d) = \frac{8}{3}$, тј. $\frac{49}{9} - d^2 = \frac{8}{3}$, те је $d = \frac{5}{3}$. Дакле, решења су: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{7}{3}$ и $c = 4$.

2. Нека ја A вредност траженог израза. Ставимо да је $B = \operatorname{tg}\alpha$. Приметимо да је

$$\begin{aligned}\sin\alpha - \cos\alpha &= 2023(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)\\ &= -2023\cos(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

Из троугла ABC имамо да је $\alpha = \pi - \beta - \gamma$. Заменом у претходни израз добијамо

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -2023\cos(\pi-\alpha) = 2023\cos\alpha,$$

одакле налазимо да је $B = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2024\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2024$.
Међутим, сређивањем траженог израза, тј. извлачењем једног члана из сваког од сабирака у бројиоцу, након множења бројиоца и имениоца са B^{2023} $(B \neq 0)$, лако налазимо да се исти своди на

$$A = \frac{B(1+B+\ldots+B^{2022})B^{2023}}{B^{2023}(\frac{1}{B}+\frac{1}{B^2}+\ldots+\frac{1}{B^{2023}})} = \frac{B^{2024}(1+B+\ldots+B^{2022})}{B^{2022}+B^{2021}+\ldots+B+1} = B^{2024}.$$

Дакле, $A = 2024^{2024}$.

3. Раздвајаћемо случајеве у зависности од тројке могућих дужина декадног записа бројева за дан, месец и годину, тако да је за 12.12.1212. одговарајућа тројка $(2,2,4)$. Писаћемо у наставку x за прву, а y за другу цифру прекрасности датума (које јединствено одређују датум дате тројке).

- $(1,1,1)$, $(1,1,2)$ и $(1,1,3)$: Година је свакако пре тренутне, тако да за цифру дана и месеца одговара било која цифра осим нуле, што даје $9\cdot 9 = 81$ датума за дату дузину године, односно $3 \cdot 81 = 243$ укупно.

- $(1,1,4)$: Овог пута имамо ограничење на години, а датум је облика $x.y.xyxy.$. Јасно је $0 < x < 3$, а када би било 2, y би морало бити 0, шо није могуће. Према томе, $x = 1$, и тада на y нема ограничења осим $y > 0$, што даје $1 \cdot 9 = 9$ датума.

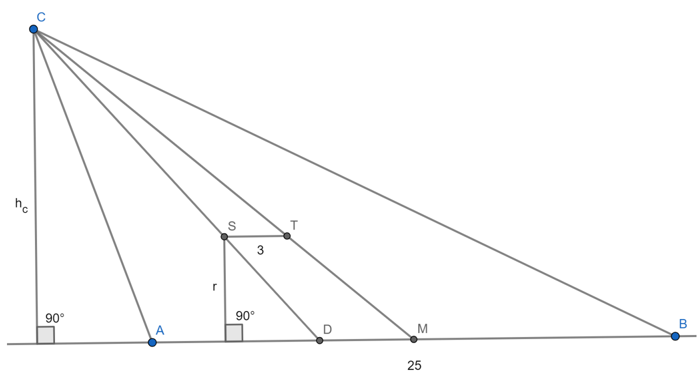
- $(1,2,1)$, $(1,2,2)$, $(1,2,3)$, $(1,2,4)$: Када год је месец дужине 2, једине могуће вредности су 10, 11 и 12, па је $y = 1$. Притом x није 0, што оставља две могућности за x и према томе два датума за дату дужину године, односно $4 \cdot 2 = 8$ укупно. Приметимо да у последњем случају $y = 1$ даје свакако датум из прошлог миленијума, па је избор x слободан.

- $(2,1,1)$ и $(2,1,3)$: Могуће вредности за x су 1, 2 и 3. Када је $x = 1$, y може узети било коју вредност сем нуле, па имамо девет могућности. Када је $x = 2$, закључујемо да је у питању фебруар одређене године, па свакако имамо 8 могућности за y. Ипак, када би y било 9, у питању би била 9. или 929. година која није преступна, па ово и није могуће. Коначно, за $x = 3$, у питању је март, а како y није нула, y може бити само 1. Укупно у овом случају имамо $2 \cdot (9 + 8 + 1) = 36$ запањујућих датума.

- $(2, 1, 2)$: Исто као малопре, уз ту разлику да је овог пута $x = 2$, $y = 9$ могуће јер је одговарајући датум 29.2.92., а 92. година је била преступна, па овде имамо $9 + 9 + 1 = 19$ запањујућих датума.
- $(2, 1, 4)$: Сада морамо пазити на ограничење да је година највише 2024. Тако је 1 једина могућност за y, док је x због броја дана ограничено на 1, 2 и 3, тј. укупно 3 датума.
- $(2, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$ и $(2, 2, 4)$: Због месеца је x нужно 1, па за y остају могућности $0, 1, 2$, што даје $4 \cdot 3 = 12$ запањујућих датума. Приметимо да је у овом случају $y = 0$ могуће јер се нигде не појављује као прва цифра.

Закључујемо да је у Новој Ери до данас било тачно 330 запањујућих датума.

4. Означимо са D пресек правих CS и AB, а са M средиште дужи AB. Како су праве ST и AB паралелне, а тежиште се налази на $\frac{2}{3}$ тежишне дужи CM, по Талесовој теореми је $DM = 4.5$. Како је M средиште AB лако рачунамо $AD = 8$ и $BD = 17$, а како је CD симетрала угла $\angle ACB$, знамо да је $\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{BD} = \frac{8}{17}$. Означимо сада са r полупречник уписане кружнице троугла ABC, са c дужину странице AB, са h_c дужину висине овог троугла из темена C, са s његов полуобим, а са P његову површину. Због паралелности правих ST и AB знамо да је $r = \frac{h_c}{3}$. Како је $P = \frac{c \cdot h_c}{2} = r \cdot s$, из претходних веза добијамо $s = \frac{3}{2}c$, односно $CA + CB = 50$. Како већ имамо $\frac{CA}{CB} = \frac{8}{17}$, закључујемо да је $CA = 16$ и $CB = 34$.



5. Из $p \geqslant 2$ добјамо да је $2^{11} = 2048 > 2024 > p^{q^r} \geqslant 2^{q^r}$, те је $10 \geqslant q^r$. Стога, $q \leqslant 2$ и $2^4 > 10 \geqslant 2^r$, одакле добијамо да је $r \leqslant 3$. Ако је $p > 3$, тада важи $2187 = 3^7 > 2024 > p^{q^r} > 3^{q^r}$, те је $2^3 > 7 > q^r \geqslant 2^r$. Следи, $3 > r$, тј. $r = 2$, па је $q^2 < 7$, тј. $q = 2$. Одавде је $p^{2^2} + 2^2 + 2 = 2024$, тј. $p^4 + 6 = 2024$, тј. $p^4 = 2018$,што је немогуће. Дакле, мра важити $p = 2$. Стога, q^r не може бити 10, па је $2024 \leqslant 2^9 + q^r + r \leqslant 512 + 10 + 3 = 525$, што је, такође, немогуће. Дакле, једначина нема решења у скупу $\mathcal{P}$.